1. На компактной римановой поверхности X рассмотрим задачу Миттаг-Леффлера для *дифференциальных форм.* Для этого зададимся локальными главными частями

$$\omega_j = \sum_{j=-m}^{-1} c_j z^j dz$$

в окрестности конечного множества точек $S = \{z_j\} \subset X$ и поставим задачу построения глобально определенной мероморфной 1-формы ω, голоморфной вне S и такой, что $\omega - \omega_j$ голоморфна в точке z_j. Докажите, что эта задача разрешима в том и только том случае, когда $\sum_j \operatorname{res}_{z_j}(\omega_j) = 0$.

2. Нарисуйте замкнутый путь γ на сфере Римана $\mathbb{P}$, разделяющий 4 различные точки z_1, z_2, z_3, z_4 в следующем смысле: путь γ не гомотопен нулю в $\mathbb{P} \setminus \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$, однако он гомотопен нулю в $\mathbb{P} \setminus \{z_1, \dots [j] \dots, z_4\}$ (здесь точка с номером j пропущена), для любого $j = 1, \dots, 4$.

3. Для $\tau \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} \tau \neq 0$ обозначим через Λ решетку $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ и через $\mathbb{C}/\Lambda$ соответствующий комплексный тор. Докажите, что бесконечное произведение

$$\sigma(z) = z \prod_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right)$$

сходится к целой функции. Для двух различных комплексных чисел z_1, z_2 найдите все полюсы мероморфной 1-формы

$$d \ln\left(\frac{\sigma(z - z_1)}{\sigma(z - z_2)}\right)$$

и вычеты в этих полюсах.